

## 自己カオス制御 double scroll 回路

平田 隆幸\* 小川 淳司\* 原田 義文\*

### Self-Controlling Chaos of Double Scroll Circuit

Takayuki HIRATA, Atsushi OGAWA and Yoshifumi HARADA

(Received Feb. 24, 1999)

Self-controlling chaos of double scroll circuit is investigated in detail from the numerical simulations. We design an electronic circuit governed by differential equations with time delayed feedback term. The phase diagram as a function of the coupling constant  $K$  and the delay time  $\tau$  is obtained. An application of self-controlling double scroll circuit to a distance measurement system is discussed.

**Key Words :** Controlling Chaos, Self-Control, Double Scroll Circuit, Time Delayed Feedback

## 1 はじめに

不安定な挙動を制御しようとする問題は、古くから工学の重要な課題であった。しかし、簡単な3階の常微分方程式でさえ、非線形項を含むと、予測不可能なカオス挙動を示しうることが非線形物理学の発展にともない分かってきた。カオスは、いたるところに存在し、比較的容易につくりだせる。つまり、カオスは、ベナール対流などの自然現象を理解する上での基礎的な概念のみならず、工学的な実用上で頻繁に出くわす可能性がある重要な課題である。

不安定な挙動を制御するという工学的な立場からみると、カオスは実用上じゃまものと考えられてきた。しかし、最近、カオスを積極的に制御しようとする研究が多くなされるようになってきた[1]-[3]。カオス制御の方法は、Ott, Grebogi, Yorke [1] によって開発された OGY 法と呼ばれる方法と、Pyragas [2] によって提案された time delayed feedback による方法に大別できる。前者は、カオス軌道の近傍には無限個の周期軌道が存在することに注目し、ちいさな擾乱を与えることによりカオス軌道を周期軌道にコントロールしようとする考えであり、比較的良く理論的な説明がなされている。一方、後者は時間遅れ項があるため無限次元の方程式になってしまう。そのゆえ、理論的な説明はそれほどすすんでいるとは言えないが、簡単に実験システムを構築できるという特徴をもっており最近注目を集めている [4]-[6]。

ここでは、電子回路をもちい、回路自身がカオス制御をおこなうシステムの研究をおこなう。松本らは、簡単な電子回路によってカオス振動子が作れることを示した [7]-[8]。松本らによる double

---

\* 応用物理学科

scroll 回路とよばれるカオス振動子は、回路のパラメータである抵抗、コンデンサ、インダクタの値を変えることによって、一定値（安定固定点）、周期振動（limit cycle）、準周期振動、カオス振動と変えることができる。本研究では、double scroll 回路を改良し、time delayed feedback 項をつけ加えることによって、自己カオス制御機能をもたせたカオス回路を設計し、これをもちいた情報処理、センサーへの応用を試みる。

## 2 時間遅れ制御項をもつ Double Scroll 回路

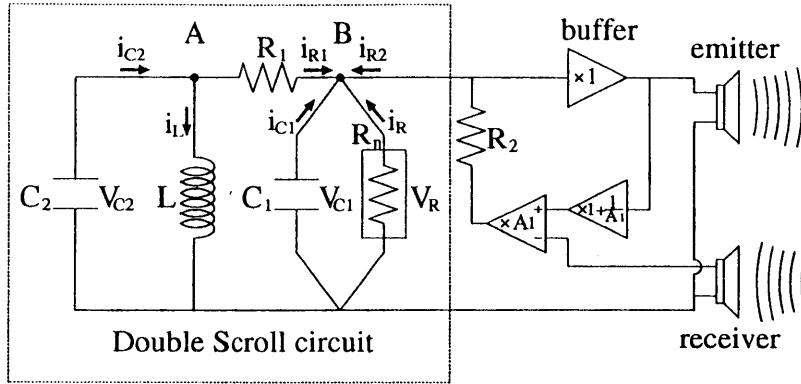


図 1: 自己カオス制御 double scroll 回路。

Double scroll 回路は、簡単な電子回路によって実際に製作することができるカオス振動子として知られている [7][8]。Double scroll 回路は、2つのコンデンサ  $C_1, C_2$ 、インダクタ  $L$ 、抵抗  $R_1$ 、増幅作用をもつ非線形抵抗（負性抵抗） $R_n$ によって構成される。図 1 に、time delayed feedback 項をもたせ、回路自身が自己カオス制御をおこなえるように改良した自己カオス制御 double scroll 回路を示す。図中の点線で囲まれた部分がオリジナルな double scroll 回路である。非線形抵抗は、抵抗両端間の電圧  $V_R$ によって流れる電流  $i_R = f(V_R)$ が決まる電流-電圧特性を持っているものとする。ここでは、オリジナルな double scroll 回路に使われているのと同じ振幅圧縮回路として知られている部分線形 (piecewise linear) 特性をもつ非線形抵抗をもちいる。 $i_R$  vs.  $f(V_R)$ の特性は、

$$i_R = f(V_R) = m_0 V_R + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)|V_R + B_p| + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)|V_R - B_p| \quad (1)$$

とする。ここで、 $m_0, m_1$ は増幅率を表す定数、 $B_p$ は折れ曲り点を示す定数である（本研究では、 $m_0 = -0.5, m_1 = -0.8, B_p = 1.0$ の値をもちいる）。なお、この非線形抵抗は、トランジスタ、OP アンプなどの増幅素子によって容易に作ることができる（例えば、文献 [9] をみよ）。

さて、図 1 の回路がしたがう微分方程式を Kirchhoff の法則から導くことにしよう。A 点での Kirchhoff の電流に関する法則（第一法則）から、

$$i_{C2} - i_L - i_{R1} = 0 \quad (2)$$

が得られる。ここで、 $i_{C2}$ 、 $i_L$ 、 $i_{R1}$ は、それぞれコンデンサ  $C_2$ 、インダクタ  $L$ 、抵抗  $R_1$ に流れる電流である。 $V_{C2}$ と  $i_{C2}$ の関係は、 $\frac{1}{C_2} \int i_{C2} = V_{C2}$ であるので両辺を微分し、 $i_{R1} = \frac{1}{R_1}(V_{C1} - V_{C2})$ を(2)式に代入することにより、

$$C_2 \frac{dV_{C2}}{dt} = \frac{1}{R_1}(V_{C1} - V_{C2}) + i_L \quad (3)$$

を得る。また、コンデンサ  $C_2$ の両端での電圧を  $V_{C2}$ とすると、

$$L \frac{di_L}{dt} = -V_{C2} \quad (4)$$

が成り立つ。さらに、B点での Kirchhoff の電流に関する法則から、

$$i_{R1} + i_{C1} + i_{R2} + i_R = 0 \quad (5)$$

が得られる。ここで、 $i_{C1}$ 、 $i_{R2}$ は、それぞれコンデンサ  $C_1$ 、抵抗  $R_2$ に流れる電流である。

さて、オリジナルな double scroll 回路にはない  $i_{R2}$ を考えてみよう。図1中のバッファとして、OPアンプをもちいた voltage follower などを使用することにより、非常に高い入力インピーダンスを実現できる。それゆえ、 $i_{R2}$ は、増幅率  $A_1$ 倍の差動アンプからの出力電圧による抵抗  $R_2$ に流れる電流によって決まると考えてよい。次に、エミッターから発信した信号  $V_{C1}(t)$ をレシーバーで受信することを考える。エミッターからの信号が物質に当たり反射され、レシーバーに入るものとする、レシーバーに入る信号は、時間  $\tau$ だけ遅れた  $V_{C1}(t - \tau)$ となる。抵抗  $R_2$ 間の電位差は、 $V_{C1}$ と差動アンプからの出力電圧との差であることから、

$$i_{R2}(t) = \frac{1}{R_2} A_1 (V_{C1}(t) - V_{C2}(t - \tau)) \quad (6)$$

となる。よって、 $\frac{1}{C_1} \int i_{C1} = V_{C1}$ をもちい、 $i_R = f(V_R) = f(V_{C1})$ 、 $i_{R1} = \frac{1}{R_1}(V_{C1} - V_{C2})$ を(5)式に代入することにより、

$$C_1 \frac{dV_{C1}(t)}{dt} = \frac{1}{R_1}(V_{C2}(t) - V_{C1}(t)) - f(V_{C1}(t)) + \frac{1}{R_2} A_1 (V_{C1}(t) - V_{C1}(t - \tau)) \quad (7)$$

が得られる。まとめると、

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dV_{C1}(t)}{dt} &= G(V_{C2}(t) - V_{C1}(t)) - f(V_{C1}(t)) + \frac{1}{R_2} A_1 (V_{C1}(t) - V_{C1}(t - \tau)) \\ C_2 \frac{dV_{C2}(t)}{dt} &= G(V_{C1}(t) - V_{C2}(t)) + i_L(t) \\ L \frac{di_L(t)}{dt} &= -V_{C2}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

を得る。ここで、 $G = \frac{1}{R_1}$ である。

この time delayed feedback 項  $\frac{1}{R_2} A_1 (V_{C1}(t) - V_{C1}(t - \tau))$ を含んだ微分方程式をもとに、回路の挙動を考える。Time delayed feedback 項がない場合は、図1において点線で囲ったオリジナルな double scroll 回路を支配する微分方程式に一致する。

### 3 数値シミュレーションの結果

最初に、time delayed feedback 項のないオリジナルな double scroll 回路の挙動をみる。Double scroll 回路は、 $G = \frac{1}{R_1}$ の値をコントロールパラメータとしてさまざまな挙動をすることが知られて

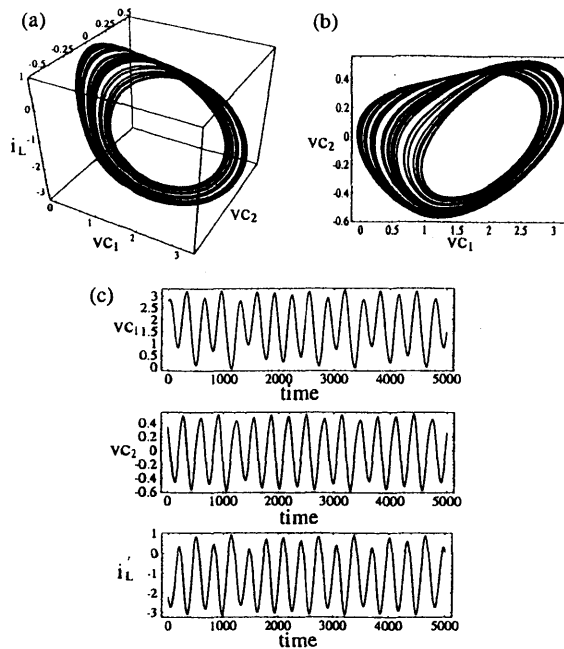


図 2: Double scroll 回路のアトラクターと時系列 ( $G = 0.65$ )。 (a) 相空間での解軌道、 (b)  $(V_{C1}, V_{C2})$  平面への射影、 (c) 時系列。

いる。図 2 に、 $C_1 = \frac{1}{9}$ 、 $C_2 = 1$ 、 $L = \frac{1}{7}$ 、 $G = 0.65$  の値を使い（以降、パラメータ  $C_1, C_2, L$  に関しては、この数値をもちいる）、4 次の Runge-Kutta 法 [10] をもちいてシミュレーションをおこなった結果を示す。なお、Runge-Kutta 法での時間ステップは、 $h = 0.001$  でおこなった。図 2 (a) に、十分に時間が経過し初期値の影響がなくなった後の位相空間での解の軌跡を、図 2 (b) に、その  $(V_{C1}, V_{C2})$  平面への投影図を、そして図 2 (c) には、 $V_{C1}, V_{C2}, i_L$  の時系列を示す。図 2 より、レスラーアトラクターに似たスパイラルタイプのストレンジアトラクターが得られていることが分かる（レスラーアトラクターなどのストレンジアトラクターに関しては、例えば、文献 [11] を参照）。カオス振動であるので厳密には周期を定義できないが、ここでは一回の振動に要した時間を周期  $T_0$  とすると、 $T_0 \sim 300$  であることが分かる。また、より詳しく  $V_{C1}$  の時系列をみると、 $2T_0 \sim 600$  の準周期的な存在をみることができる。

さて、double scroll 回路は、コントロールパラメータ  $G$  の値を変えることによって、解が安定固定点 (fixed point)、周期解 (limit cycle)、2 周期解、4 周期解、...、カオス解（スパイラル型、スクリュウ型、ダブルスクロール型）に分岐する [9]。図 3 に分岐図を示す。図 3 の分岐図は、横軸にコントロールパラメータ  $G$ 、縦軸に  $V_{C1}, V_{C2}, i_L$  における極値（時系列における微分値 = 0）をプロットしたものである。分岐図では、 $G$  を固定してみると、解が安定固定点に収束するときは 1 点、周期解のときは 2 点、2 周期解のときは 4 点、カオス解のときは無数の点として現れる。図 3 より、 $G = 0.6$  のときには安定固定点に収束していた解が、 $G = 0.61$  付近で周期解、 $G = 0.635$  付近で 2 周期解に分岐し、 $G = 0.65$  ではカオス解になっていることがわかる。

次に、time delayed feedback 項が存在する自己カオス制御 double scroll 回路の挙動をみていこう。ここでは、time delayed feedback 項の大きさを表わすパラメータを  $K = \frac{A_1}{C_1 R_2}$  として、 $(\tau, K)$

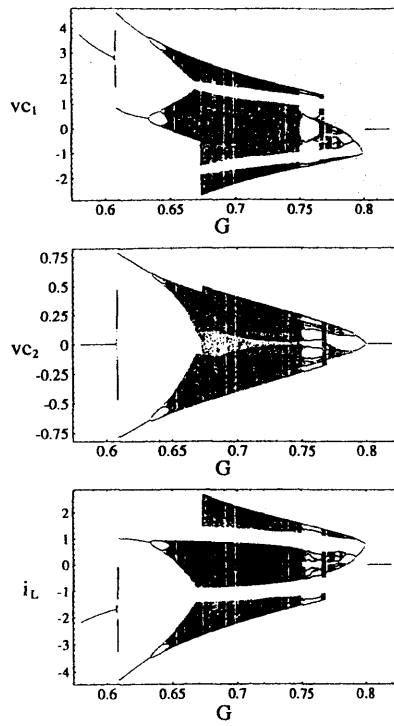


図 3: コントロールパラメータ  $G$  に関する double scroll 回路の分岐図。

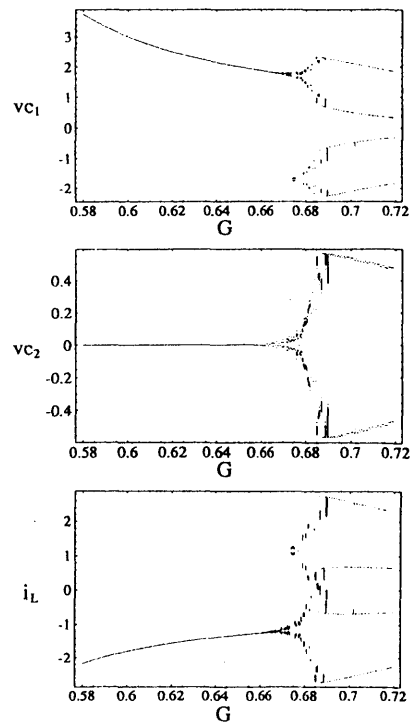


図 4: 自己カオス制御 double scroll 回路の  $G$  に関する分岐図。  $K = 1.0$ 、 $\tau = 1000$ 。

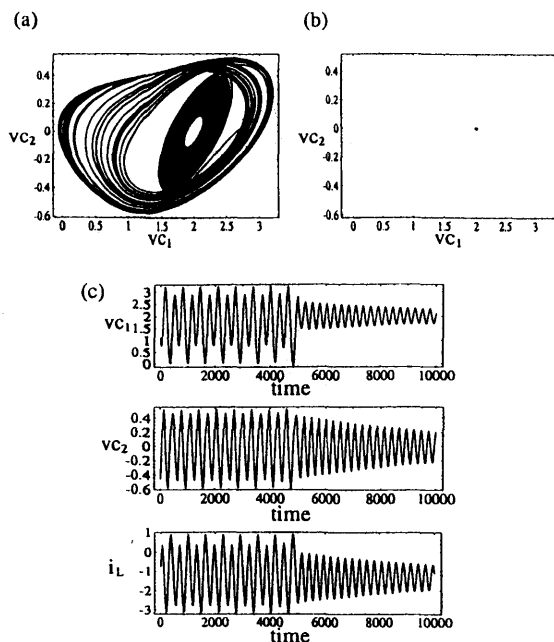


図 5: 自己カオス制御 double scroll 回路のアトラクターと時系列。(a) 相空間での解軌道、(b)  $(V_{C1}, V_{C2})$  平面への射影、(c) 時系列。( $K = 1.0, \tau = 1000, G = 0.65$ )。

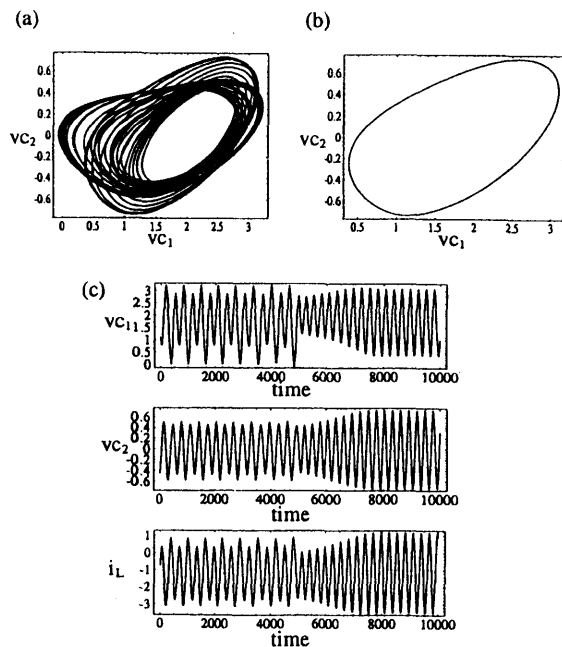


図 6: 自己カオス制御 double scroll 回路のアトラクターと時系列。(a) 相空間での解軌道、(b)  $(V_{C1}, V_{C2})$  平面への射影、(c) 時系列。( $K = 0.5, \tau = 1000, G = 0.65$ )。

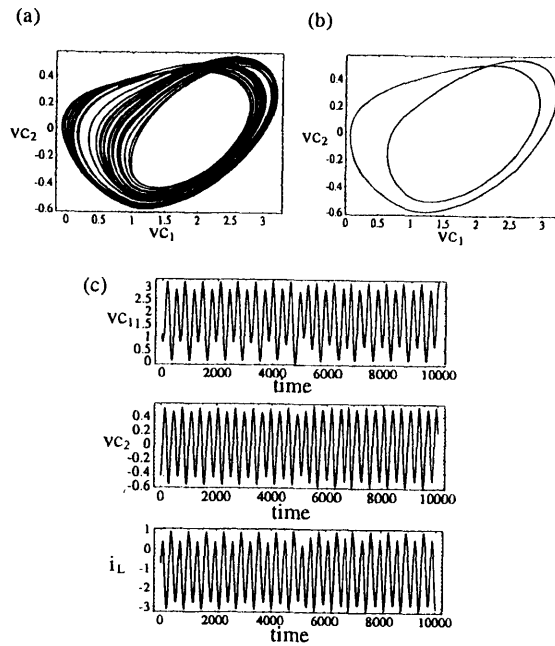


図 7: 自己カオス制御 double scroll 回路のアトラクターと時系列。(a) 相空間での解軌道、(b)  $(VC_1, VC_2)$  平面への射影、(c) 時系列。 $(K = 0.05, \tau = 1000, G = 0.65)$ 。

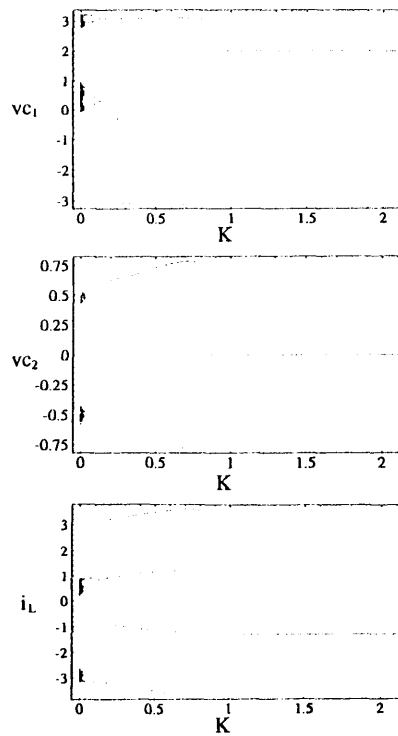


図 8: 自己カオス制御 double scroll 回路の  $K$  に関する分岐図。 $G = 0.65, \tau = 1000$ 。

を変えらることによって自己カオス制御 double scroll 回路がどのような動作をするかをみていく。まず、 $K = 1.0$ 、 $\tau = 1000$  としたとき、コントロールパラメータ  $G$  を変えていったときに得られる分岐図がどのように変わるかをみる。図 4 に、 $K = 1.0$ 、 $\tau = 1000$  とし、 $G$  を変えたときの自己カオス制御 double scroll 回路の分岐図を示す。図 4 の分岐図は、図 3 の分岐図と同様に極値をプロットすることによって作った。図 4 から  $G \sim 0.66$  まで、安定固定点に引き込まれている様子が分かる。Time delayed feedback 項がない場合（オリジナルな double scroll 回路）の分岐図（図 3）と比較してみよう。オリジナルな double scroll 回路においてカオス解が現れる領域まで、回路は自己カオス制御によって安定固定点に制御されていることが分かる。例えば、 $G=0.65$  では、図 2、図 3 から明らかなように、解はカオス解（ストレンジアトラクター）を示す領域であるが、図 4 から自己カオス制御回路においては、固定点に制御されていることが分かる。

Time delayed feedback によって、カオス軌道が安定固定点、周期解 (limit cycle)、準周期解に制御されていく様子を時系列、相空間での軌道の  $(V_{C1}, V_{C2})$  平面への投影によって詳しくみていこう。図 5 は、 $K = 1.0$ 、 $\tau = 1000$ 、 $G = 0.65$  というパラメータをもちいた結果を示す。図 5 (c) において、時間  $t = 5000$  から time delayed feedback 制御をオンにしたときの解の挙動を示す。図 5 (a) および図 5 (c) の時系列から、制御をオンにすると、ストレンジアトラクターから安定固定点に解が引き込まれていく様子を見ることができただろう。図 5 (b) には、time delayed feedback 制御をオンしてから十分時間が経過したときのアトラクター（安定固定点）が示されている。

次に、 $\tau = 1000$ 、 $G = 0.65$  は同じであるが、 $K$  の値を変えたときの様子を見ていこう。図 6 に、 $K = 0.5$  のときの結果を示す。解が周期解に制御されていく様子を見ることが出来る。図 6 (b) は、相空間での limit cycle 振動の軌跡を  $(V_{C1}, V_{C2})$  平面へ投影したものであり、制御をオンにした後、十分に時間が経過すると図 6 (b) の軌道に収束する。図 7 に、 $K = 0.05$  のときの結果を示す。解が 2 周期の準周期解に制御されていることが分かる。図 6 (c)、図 7 (c) とともに図 5 (c) と同じように、 $t = 5000$  で time delayed feedback 制御をオンにしたときに得られたものである。

$G = 0.65$ 、 $\tau = 1000$  に固定し、time delayed feedback 項の強さ  $K$  を変えたときに分岐図がどのようなになるかを図 8 に示す。図 8 は、図 3、図 4 と同様に極値をプロットすることによって製作した。図 8 から、 $K$  が小さいとき（time delayed feedback 制御項の寄与が小さいとき）は、解はカオス解であることが分かる。 $K$  を大きくするにしたがって、解は、2 周期解、周期解、安定固定点に制御されていく様子を見ることが出来る。

$G$  の値をさまざまに選ぶことは可能であるが、ここでは、time delayed feedback 項がない場合の回路がカオス解をもつ  $G = 0.65$  のときの  $(\tau, K)$  の相図を図 9 に示す。図 9 において、quasi-periodic として塗り潰している領域は、2 周期解以上の準周期解を持つ領域を示している。また、diverge と示したところは、解が発散してしまった領域である。図 9 より、 $K$  を大きくするにしたがい、カオス  $\rightarrow$  準周期  $\rightarrow$  周期  $\rightarrow$  安定固定点に制御されていく様子が分かる。また、 $\tau$  に注目すると  $\tau \sim 600$  のとき、もっとも弱い制御（小さな  $K$  の値）によっても周期解、安定固定点に制御できることが分かる。ここで、 $\tau \sim 600$  という値は、図 2 (c) の  $V_{C1}$  にみられる  $V_{C1}$  の 2 周期的な振動周期にほぼ対応していることが分かる。

## 4 距離センサとしての応用

自己カオス制御 double scroll 回路の実用上の可能性を議論する。図 1 の回路に示すように、例えば、電磁波、赤外線、超音波などの信号を発信するエミッターと、その信号を受け取れるようにレシーバーを取り付ける。エミッターから発信された信号は、対象物によって反射されレシーバー



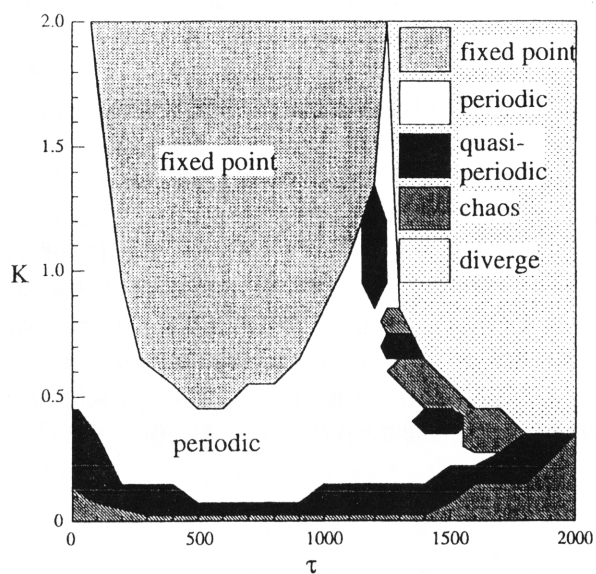


図 9:  $(\tau, K)$  の関数としたときの相図。

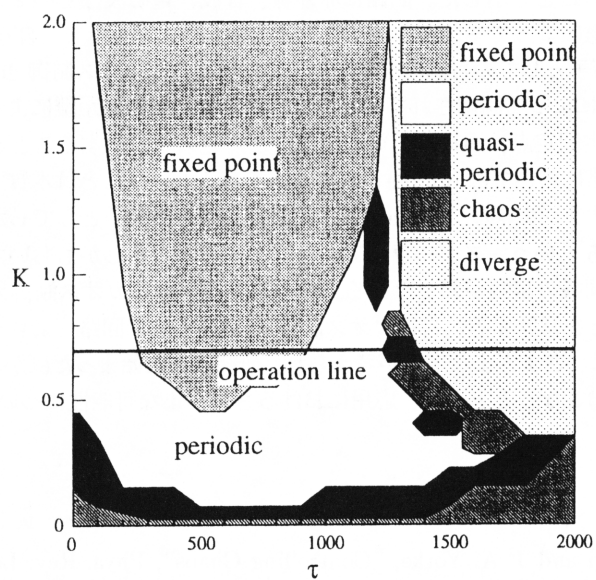


図 10: 作動線を付け加えた相図。

によって受信されることを考える。回路から対象物までの距離によって、時間遅れ $\tau$ が変わってくる。そこで、作動線 (operation line) と定義したものを相図に書き加えたものが図 10 である (ここでは、 $K = 0.7$  として作動線を描いた)。例えば、図 10 に示したように回路が作動線にしたがって機能した場合を考えよう。回路と対象物の距離が離れている場合は、回路は、発散状態から、対象物が近づくにしたがって、準周期解 ( $1400 > \tau > 1200$ )、周期解 ( $1200 > \tau > 900$ )、安定固定点 ( $900 > \tau > 300$ ) というようにかわる。このことは、自己カオス制御 double scroll 回路が多段階スイッチ作用をもっていることを意味し、情報処理をおこなっていることに相当する。

以上のように、自己カオス制御 double scroll 回路をもちいると非常に簡単な回路によって、距離計測システムを構築することができるのが分かるだろう。また、自己カオス制御 double scroll 回路をもちいた距離計測システムは、回路自身が発信する信号 (エミッターから発信される信号) に似た信号に feedback によって制御しようとする time delayed feedback 制御をもっているため、外部からのノイズに強いことが期待される。外部からパルス的なノイズ信号がレーシーバーに入力されても、回路は周期解や安定固定点には制御されないため、誤動作の少ないシステムを構築できる。

## 5 まとめ

回路自身がカオス制御をおこなうという自己カオス制御 double scroll 回路の設計をおこなった。この自己カオス制御 double scroll 回路がしたがう微分方程式を導出し、数値シミュレーションをおこなうことにより回路の動作を調べた。Time delayed feedback 制御項のパラメータ ( $\tau, K$ ) に関して相図を得た。自己カオス制御 double scroll 回路をもちいることにより簡単な回路で、距離計測システムの作成ができることを示した。回路に赤外線、音波、電磁波などのセンサーをとりつけると、対象物と回路の距離によって多段階のスイッチ機能をもつことを示し、自己カオス制御 double scroll 回路の情報処理素子としての可能性を示した。これは、自己カオス制御 double scroll 回路は、time delayed feedback によって制御されているので、対象物と回路の距離によって回路自身が制御する目標 (例えば、安定固定点、周期解、準周期解など) をスイッチすることを利用している。

最後に、本研究の回路においては double scroll 回路であるということは本質ではないことに注意しておこう。これは、オリジナルな double scroll 回路をカオス振動子としてしかもちいていないことから分かる ( $G = 0.65$  という、スパイラルアトラクターのところしかもちいていない)。つまり、他のカオス振動子でも同様の議論がおこなえる。このことは、自己カオス制御カオス回路が大きな可能性を秘めていることを意味する。自己カオス制御 double scroll 回路 (より一般的には、自己カオス制御カオス回路) は、さまざまな応用が考えられ、研究はまだ始まったばかりである。今後、回路のより詳しい解析をおこなうとともに、応用におけるさまざまな可能性について調べていきたい。

## 参考文献

- [1] E. Ott, C. Grebogi and J. A. Yorke, "Controlling Chaos", Phys. Rev. Lett., **64**, 1196-1199 (1990).
- [2] K. Pyragas, "Continuous control of chaos by self-controlling feedback", Phys. Lett. A, **170**, 421-428 (1992).
- [3] 潮俊光, "カオス制御", 朝倉書店, 104 pp. (1996).

- [4] W. Just, T. Bernard, M. Ostheimer, E. Reibold, and H. Benner, "Mechanism of Time-Delayed Feedback Control", *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 203-206 (1997).
- [5] W. Just, D. Reckwerth, J. Möckel, E. Reibold, and H. Benner, "Delayed Feedback Control of Periodic Orbits in Autonomous Systems", *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 562-565 (1998).
- [6] R. Hegger, M. J. Bünner, H. Kantz, and A. Giaquinta, "Identifying and Modeling Delay Feedback Systems", *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 558-561 (1998).
- [7] T. Matsumoto, L. O. Chua and M. Komuro, "The Double Scroll", *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-32, 798-818 (1985).
- [8] 小室元政、松本隆、Chua, L. O., カオス第2章 "カオスを電子回路でとらえる", サイエンス社、20-64 (1990).
- [9] 石橋幸男, "アナログ電子回路", 培風館, 306 pp. (1990).
- [10] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, "Numerical Recipes in C", 日本語訳 丹慶勝市・奥村晴彦・佐藤俊郎・小林誠, 技術評論社, 685 pp. (1993).
- [11] 平田隆幸, "形でみる非線形物理学 - コンピュータでみるストレンジアトラクター (散逸系) -", *形の科学会誌*, **13**, 13-23 (1998).

